JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 53, 198–220 (1988)

Effiziente Berechnung spezieller Funktionen mittels asymptotischer Entwicklungen und Eliminationsprozeduren*

GUIDO WALZ

Fakultät für Mathematik und Informatik, Universität Mannheim, D-6800 Mannheim 1, West Germany

Communicated by G. Meinardus

Received February 14, 1986

In der vorliegenden Arbeit soll eine Methode zur Approximation von Funktionen vorgestellt werden, die sich grundsätzlich von den üblichen Approximationsverfahren (polynomiale und rationale Approximation, Spline-Methoden) unterscheidet; sie ist anwendbar auf eine große Zahl von Funktionen, z.B. auf die Logarithmusfunktion, auf arcus- und area-Funktionen sowie auf elliptische Integrale erster Art. Zahlreiche numerische Beispiele und Vergleiche, z.B. mit der Methode des arithmetisch–geometrischen Mittels, belegen die Effizienz unseres Verfahrens. © 1988 Academic Press, Inc.

In this paper we suggest a method for the approximation of functions, which differs on principle from the usual approximation methods (polynomial and rational approximations, splines); it can be applied to a great variety of functions, e.g., the natural logarithm, inverse circular, and hyperbolic functions and elliptic integrals of the first kind. Many numerical examples and comparisons, e.g., with the method of arithmetic–geometric mean, illustrate the efficiency of our method. © 1988 Academic Press, Inc.

0. EINLEITUNG

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Konstruktion spezieller asymptotischer Entwicklungen sowie deren Anwendung auf die Approximation von Funktionen auf einem reellen Intervall. Es handelt sich dabei nicht um die normalerweise vorliegenden Entwicklungen "für großes Argument" (d.h. für $|x| \to \infty$), sondern um eine spezielle Art der Konvergenz einer Funktionenfolge $\{\sigma_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine vorgegebene Funktion $f(x)$, also asymptotische Betrachtungen für $n \to \infty$,

* Diese Arbeit wurde im Rahmen eines von der Deutschen Forschungs-Gemeinschaft geförderten Projekts (Nr. Me 66/5-2) erstellt.

0021-9045/88 $3.00

Das spezielle, noch zu definierende Konvergenzverhalten von $\{\sigma_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ macht es möglich, aus dieser Folge durch *lineare Eliminationsverfahren* neue, schneller konvergente Folgen zu konstruieren.

Definitionen und Ausführungen der ersten Kapitels dieser Arbeit wurden weitgehend übernommen von G. Meinardus, der als erster asymptotische Systeme und Entwicklungen in dieser Form definierte [9; 10, S.156ff]. Dabei handelt es sich im wesentlichen um eine verallgemeinerte und gleichzeitig vereinheitlichte Darstellung verschiedener älterer Verfahren, etwa der "Extrapolation vom Richardson-Typ" oder des Romberg-Verfahrens; einen guten Überblick über diese "Extrapolationsverfahren" gibt D. C. Joyce [7].

Ein Problem bei der Anwendung der im ersten Kapitel eingeführten Methode auf die Approximation von Funktionen besteht darin, Funktionenfolgen $\{\sigma_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ zu finden, die in geeigneter Weise gegen die Funktion $f(x)$ konvergieren. Wir schlagen daher in Kapitel 2 ein Verfahren vor, mit dem solche Folgen *konstruiert* werden können. Ansätze hierfür findet man schon bei H. Rutishauser [12] und A. Hurwitz [6], der in dieser 1911 veröffentlichten Arbeit bereits eine überraschend modern anmutende Darstellung gibt. Er geht allerdings nicht auf das spezielle Konvergenzverhalten der Folgen $\{\sigma_n(x)\}$ ein und zeigt auch nicht Anwendungsmöglichkeiten in der Fülle, wie wir das tun werden.

Unser Verfahren is anwendbar zur Approximation von Funktionen, die auf dem betrachteten Intervall umkehrbar sind; wir behandeln als Beispiele den Logarithmus sowie arcus-Funktionen.

Besonders effizient ist es, wenn die Umkehrfunktion der zu approximierenden Funktion ein *algebraisches Additionstheorem* besitzt. Dies führt im dritten Kapitel zur Betrachtung der größten Klasse von Funktionen dieser Art, den elliptischen (speziell *Jacobi's elliptische Funktionen*), und den *elliptischen Integralen erster Art* als deren Umkehrfunktionen.

Um dem Leser die wesentlichen Eigenschaften dieser Funktionen wieder ins Gedächtnis zu rufen, ist die Darstellung derselben etwas ausführlicher, als dies für die Anwendung unseres Verfahrens notwendig wäre.

Kapitel 3 beinhaltet ebenfalls einen (numerischen) Vergleich unseres Verfahrens mit dem z.Zt. sehr aktuellen AGM-Verfahren zur Approximation von elliptischen Integralen erster Art (vgl. [2, 3, 13]). Es zeigt sich, daß für Fehlergrößen bis etwa 10^{-20}, wie sie für numerische Approximationen normalerweise ausreichend sind, unser asymptotisches Verfahren (in Verbindung mit der Eliminationsprozedur) schneller zum Ziel führt als die AGM-Methode, deren quadratische Konvergenz erst bei größeren Genauigkeiten zum Tragen kommt.

Die Approximierbarkeit des elliptischen Integrals $F(x, k)$ nutzen wir anschließend aus, um seine Umkehrfunktion, den *sinus amplitudinis* $sn(x, k)$

mittels der *Newton-Iteration zur Berechnung der inversen Funktion* zu approximieren. Die Newton-Iteration ist hier effizient anwendbar, da die Ableitung des elliptischen Integrals,

$$\frac{d}{dx}F(x,k)=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}^{-1}$$

elementar berechenbar ist. Auch hier geben wir ein numerisches Beispiel.

Die somit gezeigte Approximierbarkeit von $sn(x,k)$, einer der elliptischen Funktionen Jacobi's, benutzen wir schließlich dazu, um die (zumindest theoretische) Berechenbarkeit *beliebiger elliptischer Funktionen* mit der vorgestellten Methode zu zeigen.

1. Asymptotische Systeme und asymptotische Entwicklungen

Im folgenden werden wir die für diese Arbeit zentralen Begriffe "asymptotisches System" und "asymptotische Entwicklung" definieren und erläutern sowie damit zusammenhängende lineare Eliminationsprozeduren einführen. Man vergleiche hierzu G. Meinardus [9, 10].

Definition 1.1. (a) Ein System V von Vektoren

$$v^{(\mu)}=(v_1^{(\mu)},v_2^{(\mu)},\ldots),\qquad \mu\in\mathbb{N}$$

heißt *asymptotisches System*, wenn für alle $\mu\in\mathbb{N}$ die folgenden Aussagen gelten:

1. $v_n^{(\mu)}\neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$,
2. $v_n^{(\mu)}=o(1)$ für $n\to\infty$,
3. $v_n^{(\mu+1)}=o(|v_n^{(\mu)}|)$ für $n\to\infty$.

(b) Es sei I ein reelles Intervall und $S=\{\sigma_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge auf I definierter Funktionen. Die Folge S besitzt eine *asymptotische Entwicklung* der Ordnung $m+1$ nach dem as. System V, wenn es von n unabhängige (auf I definierte) Funktionen $f(x)$ und $c_\mu(x)$, $\mu=1(1)m+1$ gibt, so daß

$$\sigma_n(x)=f(x)+\sum_{\mu=0}^{m}c_{\mu+1}(x)\cdot v_n^{(\mu+1)}+O(|v_n^{(m+2)}|)\tag{1}$$

für alle $x\in I$.

Es gilt dann also für alle $x\in I$:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x)=f(x).$$

Wir wollen nun die beiden am häufigsten vorkommenden asymptotischen Systeme darstellen und daran aufzeigen, wie das spezielle Konvergenzverhalten (1) der Folge S dazu benutzt werden kann, im jeweiligen Fall durch *lineare Eliminationsverfahren* neue Folgen zu konstruieren, die mit wachsendem n rascher gegen $f(x)$ konvergieren.

1.1. *Geometrische asymptotische Systeme*

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ komplexe Zahlen mit

$$1 > |\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > 0;$$

Ein asymptotisches System heißt *geometrisches as. System* $G = G(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, wenn für alle μ gilt:

$$v^{(\mu)} = \{\lambda_\mu, \lambda_\mu^2, \lambda_\mu^3, \ldots\}.$$

Besitzt die Folge $\{\sigma_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ also eine as. Entwicklung nach einem geometrischen as. System, so hat (1) die Form

$$\sigma_n(x) = f(x) + \sum_{\mu=0}^{m} c_{\mu+1}(x) \cdot \lambda_{\mu+1}^n + O(|\lambda_{m+2}^n|) \qquad \text{für} \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Durch Elimination des c_1-Terms kann man eine rascher konvergente Folge konstruieren:

LEMMA 1.2. *Die Folge* $\{\sigma_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ *besitze auf* I *die as. Entwicklung* (2) *mit* $m \geqslant 2$. *Dann besitzt die Folge* $\{\sigma_n^{(1)}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, *definiert durch*

$$\sigma_n^{(1)}(x) := \sigma_n(x) + \frac{1}{1-\lambda_1}(\sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x)), \tag{3}$$

für alle $x \in I$ *die as. Entwicklung*

$$\sigma_n^{(1)}(x) = f(x) + \sum_{\mu=1}^{m} c_{\mu+1}^{(1)}(x) \cdot \lambda_{\mu+1}^n + O(|\lambda_{m+2}^n|) \qquad \textit{für} \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Sie konvergiert also schneller gegen $f(x)$ *als* $\sigma_n(x)$ (*falls* $c_1(x) \neq 0$).

Beispiele hierzu findet man in [9, 10].

1.2. *Logarithmische asymptotische Systeme*

Es seien $\rho_1, \rho_2, \ldots$ komplexe Zahlen mit

$$0 < \operatorname{Re} \rho_1 < \operatorname{Re} \rho_2 < \cdots.$$

Ein asymptotisches System heißt *logarithmisches as. System* $L = L(\rho_1, \rho_2, \ldots)$, wenn für alle μ gilt:

$$v^{(\mu)} = \{1^{-\rho_\mu}, 2^{-\rho_\mu}, 3^{-\rho_\mu}, \ldots\}.$$

Besitzt die Folge $\{\sigma_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ also eine Entwicklung nach einem logarithmischen as. System, so hat (1) die Form

$$\sigma_n(x)=f(x)+\sum_{\mu=0}^{m} c_{\mu+1}(x)\cdot n^{-\rho_{\mu+1}}+O(n^{-\operatorname{Re}\rho_{m+2}}) \qquad \text{für} \quad n\to\infty. \tag{5}$$

Auch die Konvergenz der durch (5) gegebenen Folge kann durch Elimination des c_1-Terms beschleunigt werden, etwa durch die Vorschrift

$$\sigma_n^{(1)}(x):=\sigma_n(x)+\left(1\Big/\left(1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\rho_1}\right)\right)(\sigma_{n+1}(x)-\sigma_n(x)). \tag{6}$$

Da das Verfahren (6) aber für große n numerisch instabil ist, verwandelt man meist (5) in eine Entwicklung nach einem geometrischen as. System; hierzu wählt man zwei natürliche Zahlen n_0 und l mit $l\geqslant 2$ und definiert die Folge $\{y_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$ durch

$$y_i(x):=\sigma_{l^i\cdot n_0}(x) \qquad \text{für} \quad i\in\mathbb{N},\ x\in I.$$

$\{y_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$ besitzt eine as. Entwicklung nach dem geometrischen System $G(l^{-\rho_1}, l^{-\rho_2}, ...)$.

Für den häufigsten Fall, nämlich $l:=2$ und $n_0:=1$, mit dem wir uns im folgenden beschäftigen werden, wollen wir noch die asymptotische Entwicklung von $y_i(x)$ sowie die Elimination (3) explizit angeben; da man die Vorschrift natürlich wiederholt anwenden kann, formulieren wir das Verfahren (3) in iterativer Form.

LEMMA 1.3. *Die Folge $\{y_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$ besitze eine as. Entwicklung nach dem geometrischen System $G(2^{-\rho_1}, 2^{-\rho_2}, ...)$. Dann besitzen die nach der Vorschrift*

$$\left.\begin{aligned} y_i^{(0)}(x)&:=y_i(x) && i=0(1)\\ y_i^{(k)}(x)&:=\frac{2^{\rho_k}y_{i+1}^{(k-1)}(x)-y_i^{(k-1)}(x)}{2^{\rho_k}-1} && \begin{aligned}k&=1(1)m\\ i&=0(1)\end{aligned}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

gebildeten Folgen $\{y_i^{(k)}(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Entwicklung nach dem geometrischen System $G(2^{-\rho_{k+1}}, 2^{-\rho_{k+2}}, ...)$, es gilt

$$y_i^{(k)}(x)=f(x)+\sum_{\mu=k}^{m} c_{\mu+1}(x)\cdot 2^{-i\cdot\rho_{\mu+1}}+O(2^{-i\cdot\operatorname{Re}\rho_{m+2}}).$$

Das Lemma folgt direkt aus den vorhergehenden Enläuterungen; (7) ist die auf diesen Fall übertragene iterative Formulierung von (3).

Bemerkung 1.4. In der numerischen Praxis gibt man einen maximalen Index $k_{\max}$ vor, so daß die Indexvorschrift in (7) lautet: $k = 1(1)k_{\max}$ und $i = 0(1)k_{\max} - k$; die Ergebnisse werden in Schema-Form notiert:

$$\begin{array}{cccc}
y_0^{(0)}(x) & & & \\
 & y_0^{(1)}(x) & & \\
y_1^{(0)}(x) & & \ddots & \\
 & \vdots & & y_0^{(k_{\max})}(x) \\
\vdots & & .\cdot\cdot & \\
 & y_{k_{\max}-1}^{(1)}(x) & & \\
y_{k_{\max}}^{(0)}(x) & & &
\end{array} \tag{8}$$

Der Wert $y_0^{(k_{\max})}(x)$ dient dann als *Approximation an* $f(x)$.

We bereits erwähnt, wurden asymptotische Systeme in der hier verwendeten Form erstmals von G. Meinardus eingeführt; als Spezialfälle enthalten sind zahlreiche numerische Verfahren, die meist als "Extrapolationsverfahren" bezeichnet werden, etwa die Richardson-Extrapolation oder das erste iterative Verfahren, die Romberg-Integration. Einen guten Überblick diese "Extrapolationsverfahren" sowie eine umfangreiche Literaturliste findet man bei D. C. Joyce [7].

2. Gewinnung Asymptotischer Entwicklungen

Obwohl es viele Beispiele für as. Entwicklungen der obigen Art gibt, fehlt es doch an allgemeinen Verfahren zur Konstruktion geeigneter Folgen $\{\sigma_n(x)\}$ mit dem gewünschten Konvergenzverhalten.

Im folgenden werden wir ein solches Verfahren vorschlagen; wir beginnen mit einem illustrativen Beispiel.

2.1. *Ein Beispiel*: arcsin(x)

Die folgende Konstruktion ist eine Verallgemeinerung eines sehr alten, bereits auf Archimedes zurückgehenden Verfahrens zur Berechnung von π. Man vergleiche hierzu etwa [7, 9, 10, 15].

Es sei $x \in [-1, 1]$ gegeben; wir wollen eine as. Entwicklung für $f(x) = \arcsin(x)$ konstruieren.

In diesem Spezialfall kennen wir explizit die Taylor-Entwicklung von $f^{-1}(x) = \sin(x)$, es gilt

$$f^{-1}(x) = x + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu}}{(2\mu+1)!} x^{2\mu+1}. \tag{9}$$

Für $n = 1(1)\infty$ definieren wir nun

$$\sigma_n(x) := n \cdot \sin\left(\frac{\operatorname{arc\,sin}(x)}{n}\right); \tag{10}$$

aufgrund von (9) gilt

$$\sigma_n(x) = \operatorname{arc\,sin}(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu(x)}{n^{2\nu}} \qquad n = 1(1)\infty. \tag{11}$$

Das bedeutet nun aber gerade, daß $\sigma_n(x)$ eine as. Entwicklung nach dem logarithmischen System $L(2, 4, ...)$ besitzt.

Auf den ersten Blick macht die Approximation von $\operatorname{arc\,sin}(x)$ durch (10) nicht viel Sinn, da man die Funktionen $\operatorname{arc\,sin}(x)$ und $\sin(x)$ ja hierfür bereits auswerten müßte; glücklicherweise kann jedoch die Teilfolge $\{\sigma_{2^i}(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$, die nach Kapitel 1 eine Entwicklung nach einem geometrischen as. System besitzt, *rekursiv* berechnet werden:

LEMMA 2.1. *Es sei* $x \in [-1, 1]$; *man definiere*

$$\left.\begin{aligned} y_0 &:= x \\ y_i &:= \sqrt{2} \cdot y_{i-1} \Big/ \sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{y_{i-1}}{2^{i-1}}\right)^2}} \qquad i = 1(1)\infty. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Dann gilt

$$y_i = y_i(x) = \sigma_{2^i}(x) \qquad i = 0(1)\infty.$$

Das Lemma folgt sofort aus (10) und der Halbwinkelformel des Sinus (s. [1], Zf. 4.3).

2.2. *Asymptotische Entwicklungen für beliebige umkehrbare Funktionen*

Wir wollen nun für beliebige Funktionen $f(x)$, die auf einem reellen Intervall der Form $[-\alpha, \alpha]$ definiert und dort umkehrbar sind, asymptotische Entwicklungen konstruieren. Zu diesem Zweck werden wir das in obigem Beispiel erkennbare Prinzip verallgemeinern.

Gegeben sei das Intervall $I := [-\alpha, \alpha]$ mit $\alpha > 0$ und eine Funktion f, die I bijektiv auf $[\beta, \gamma]$ abbildet; f besitze eine für alle $x \in I$ konvergente Potenzreihenentwicklung der Form

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu \qquad \text{mit} \quad a_1 \neq 0.$$

Aufgrund der Bijektivität von f existiert eine auf $[\beta, \gamma]$ definierte Umkehrfunktion f^{-1}, die eine Potenzreihenentwicklung der Form

$$f^{-1}(y) = \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu y^\mu \tag{13}$$

besitzt (wegen $f(0)=0$ ist $0 \in [\beta, \gamma]$). An der Identität

$$x = \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu \right)^\mu$$

erkennt man, daß die Koeffizienten b_μ rekursiv berechenbar sind, z.B.

$$\left. \begin{aligned} & b_1 = \frac{1}{a_1}, \qquad b_2 = -\frac{a_2}{a_1^3} \\ & \text{und allgemein} \\ & b_\mu = \frac{1}{a_1^{2\mu-1}} \sum_{i_1 + \cdots + i_\mu \leq \mu - 1} \gamma_{i_1 \cdots i_\mu} \cdot a_1^{i_1} \cdots a_\mu^{i_\mu} \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

(vgl. [14, S. 160]).

Diese Überlegungen sind Grundlage für den folgenden (Haupt-)Satz, über eine Möglichkeit zur Gewinnung asymptotischer Entwicklungen.

SATZ 2.2. *Mit den obigen Bezeichnungen und Voraussetzungen besitzen die Funktionen $\sigma_n(x)$, definiert durch*

$$\sigma_n(x) := n \cdot a_1 \cdot f^{-1}\left(\frac{f(x)}{n}\right) \qquad n = 1(1)\infty \tag{15}$$

eine as. Entwicklung nach dem logarithmischen System $L(1, 2, \ldots)$ mit beliebigem m.

Der *Beweis* ergibt sich durch formales Ausrechnen von $\sigma_n(x)$:

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= n \cdot a_1 \cdot f^{-1}\left(\frac{f(x)}{n}\right) \\ &= \frac{n}{b_1} \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\mu \\ &= f(x) + \sum_{\mu=2}^{\infty} b_\mu \cdot \frac{f(x)^\mu}{n^{\mu-1}} \\ &= f(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu(x)}{n^\nu}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Bemerkung 2.3. Besitzt die Taylor-Entwicklung von f^{-1} nur ungerade Potenzen von x, so haben die nach (15) definierten $\sigma_n(x)$ eine as. Entwicklung nach dem System $L(2, 4, \ldots)$, so z.B. in Abschnitt 2.1.

Eine Entwicklung nach dem System $L(2, 4, \ldots)$ kann aber auch andernfalls gewonnen werden, und zwar durch die Definition

$$\sigma_n(x) := \frac{n \cdot a_1}{2} \left\{ f^{-1}\left(\frac{f(x)}{n}\right) - f^{-1}\left(\frac{f(x)}{-n}\right) \right\}.$$

Wie wir oben für $\arcsin(x)$ zeigten, kann die Folge $\{\sigma_n(x)\}$ (oder eine Teilfolge, z.B. $\{\sigma_{2^i}(x)\}$) häufig rekursiv berechnet und somit sinnvoll zur Approximation von f benutzt werden, vgl. die folgenden Beispiele und Kapitel 3 (das erste Element der Folge, $\sigma_1(x)$, ist gerade der Linearteil der Taylorreihe von f und kann somit immer explizit angegeben werden).

Bemerkung 2.4. Die vorangegangenen Überlegungen einschließlich Satz 2.2 können auch für den komplexen Fall formuliert werden; die hierzu nötigen Sätze über die Umkehrung von Potenzreihen findet man etwa in [4, S. 135ff] oder [6, S. 159ff].

2.3 *Weitere Beispiele*

2.3.1. $f(x) := \arctan(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} ((-1)^{\mu}/2\mu+1)\, x^{2\mu+1}$. Aufgrund der Beziehung $f(x) = \pi/2 - f(1/x)$ genügt es, das Intervall $[-1, 1]$ zu betrachten. Es gilt dann $[\beta, \gamma] = [-\pi/4, \pi/4]$. $\sigma_n(x)$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &:= n \cdot \tan\left(\frac{\arctan(x)}{n}\right) \\ &= \arctan(x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu(c)}{n^{2\nu}} \qquad n = 1(1)\infty. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Halbwinkelformel des Tangens [1, Zf. 4.3] erhalten wir die Rekursionsformel

$$\begin{aligned} y_0 &:= x \\ y_i &:= \frac{2 \cdot y_{i-1}}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{y_{i-1}}{2^{i-1}}\right)^2}} \qquad i = 1(1)\infty \end{aligned} \tag{16}$$

und wiederum ist

$$y_i = y_i(x) = \sigma_{2^i}(x).$$

Ein kleines numerisches Beispiel hierzu: Approximation von $\arctan(1) = \pi/4 = 0.7853981633974483\ldots$ mittels der Rekursion (16) und der Elimination (7).

Die erste Spalte von Tabelle I zeigt in der i-ten Reihe den Absolutbetrag des Fehlers von y_i (beginnend mit $i = 0$). Die folgenden Spalten zeigen die Fehler von $y_i^{(k)}$ in Form des Schemas (8).

TABELLE I

i \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0.21E−00							
		0.14E−01						
1	0.43E−01		0.22E−03					
		0.67E−03		0.88E−06				
2	0.10E−01		0.26E−05		0.86E−09			
		0.40E−04		0.26E−08		0.21E−12		
3	0.25E−02		0.39E−07		0.63E−12		0.13E−16	
		0.24E−05		0.95E−11		0.38E−16		0.20E−21
4	0.63E−03		0.60E−09		0.58E−15		0.59E−21	
		0.15E−06		0.36E−13		0.88E−20		
5	0.16E−03		0.93E−11		0.56−18			
		0.95E−08		0.14E−15				
6	0.39E−04		0.14E−12					
		0.59E−09						
7	0.99E−05							

2.3.2. $f(x) := \log(1+x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} ((-1)^{\mu+1}/\mu)\, x^{\mu}$. Es sei $I := [-\alpha, \alpha]$ mit $0 < \alpha < 1$. Wir haben

$$f^{-1}(y) = \exp(y) - 1.$$

$\sigma_n(x)$ ist somit definiert durch

$$\sigma_n(x) := n \cdot \left(\exp\left(\frac{\log(1+x)}{n} \right) - 1 \right) \qquad n = 1(1)\infty. \tag{17}$$

Aufgrund der Funktionalgleichung von exp können *alle* $\sigma_n(x)$ durch elementare Operationen berechnet werden, es gilt

$$\sigma_n(x) = n((1+x)^{1/n} - 1); \tag{18}$$

Satz 2.2 besagt in diesem Fall, daß

$$\sigma_n(x) = \log(1+x) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu(x)}{n^\nu}.$$

Durch die Transformation $t := 1 + x$ erhalten wir

$$\sigma_n = n \cdot (t^{1/n} - 1), \tag{19}$$

eine weithin bekannte Formel zur Berechnung von $\log(t)$. Nach Bemerkung 2.3 können wir nun noch die Funktionen

$$\tilde{\sigma}_n(t) := \frac{n}{2} \cdot (t^{1/n} - t^{-1/n}) \tag{20}$$

bilden, die eine Entwicklung nach dem as. System $L(2, 4, ...)$ besitzen (s. auch [10, S. 170]).

Als nächstes wollen wir einen Vergleich durchführen zwischen unserer Methode der Approximation durch Elimination, angewandt auf (20) mit $n = 2^i$, und polynomialer sowie rationaler Approximation mit gleichem Zähler- und Nennergrad. Dies soll beispielhaft an der Funktion $\log(x)$ auf dem Intervall $[\frac{1}{4}, \frac{7}{4}]$ vorgeführt werden.

Um einen ersten Eindruck zu gewinnen, betrachte man zunächst Tabelle II; Spalte 1 enthält die durch die Approximation zu erreichende Genauigkeit $\varepsilon_j = 2^{-j}$, Spalte 2 gibt den Index $k_{\max}$, d.h. anschaulich die Anzahl der Spalten an, die das Eliminationsschema (8), angewandt auf (20), haben muß. In Spalte 3 wird der Grad des Approximationspolynoms, dessen Abweichung erstmals ε_j unterschreitet, angegeben, in Spalte 4 entsprechend der Zähler- und Nennergrad der rationalen (n, n)-Approximation. Um einen aussagefähigen Vergleich zu erhalten, muß man nun den Aufwand bestimmen, den die jeweilige Methode erfordert: Die Berechnung der Werte der ersten Spalte nach (20),

$$y_i(x) = 2^{i-1} \cdot (x^{1/2^i} - x^{-1/2^i}) \qquad i = 0(1)k$$

TABELLE II

(1)	(2)	(3)	(4)
ε_j	$k_{\max}$	n	(n, n)
2^{-1}	0	1	(1, 1)
2^{-2}	1	1	(1, 1)
2^{-3}	1	2	(1, 1)
2^{-4}	2	3	(1, 1)
2^{-5}	2	3	(1, 1)
2^{-6}	2	4	(2, 2)
2^{-7}	2	5	(2, 2)
2^{-8}	2	5	(2, 2)
2^{-9}	2	6	(2, 2)
2^{-10}	2	7	(2, 2)
2^{-11}	2	8	(2, 2)
2^{-12}	2	8	(3, 3)
2^{-13}	2	9	(3, 3)
2^{-14}	3	10	(3, 3)

benötigt k Quadratwurzel-Operationen ($x^{1/2^i} := \sqrt{x^{1/2^{i-1}}}$), sowie je $(k+1)$ Additionen, Divisionen, and Shifts (= Division durch eine Zweierpotenz).

Ein Eliminationsvorgang (7) besteht aus einer Addition, einer Division und einem Shift, so daß wir den folgenden *Gesamtaufwand* zur Berechnung der Approximation $y_0^{(k)}$ haben:

jeweils

$$k+1+\sum_{j=1}^{k} j$$

$$= k+1+\frac{k\cdot(k+1)}{2} \qquad \text{Shifts, Additionen, und Divisionen}$$

sowie

$$k \qquad \text{Quadratwurzeln.}$$

Die Auswertung eines Polynoms n-ten Grades erfordert je n Multiplikationen und Additionen, entsprechend die Auswertung einer rationalen Funktion mit Zähler- und Nennergrad n je $2n$ Multiplikationen und Additionen sowie eine Division.

Um also etwa im obigen Beispiel eine Genauigkeit von 2^{-13} zu erhalten, muß man die folgenden Operationen durchführen (vgl. Tabelle II):

Iteration (20) mit Elimination (7):	6	Shifts
	6	Additionen
	6	Divisionen
	2	Quadratwurzeln
Polynom-Approximation:	9	Additionen
	9	Multiplikationen
Rationale (n, n)-Approximation:	6	Additionen
	6	Multiplikationen
	1	Division

Zieht man in Betracht, daß auf modernen Rechenanlagen das Auswerten einer Quadratwurzel kaum länger dauert als z.B. eine Division, so sieht man, daß bereits bei dieser kleinen Genauigkeit ($2^{13} \approx 10^{-4}$) das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren mit den beiden klassischen vergleichbar ist, zumal man sich ja vor Anwendung von (20) *keinerlei Koeffizienten* o.ä. verschaffen muß, im Gegensatz zu beiden anderen Verfahren, wo dies zumindest im rationalen Fall häufig Schwierigkeiten bereitet.

Nicht nur gleichwertig, sondern deutlich vorteilhafter ist das Eliminationsverfahren bei höheren Genauigkeiten: So hat z.B. $y_0^{(4)}$ in obigem Beispiel eine Abweichung von weniger also 10^{-22}. Um einen Fehler dieser Größenordnung mit polynomialer Approximation zu erreichen, muß man ein Polynom etwa 60-ten Grades (!) auswerten (Halbachsensumme der Regularitätsellipse $= \frac{1}{3} \cdot (4 + \sqrt{7}) \approx 2.215$), was – ganz abgesehen von numerischen Schwierigkeiten – sehr aufwendig und speicherplatzintensiv ist.

Es gibt zahlreiche weitere Beispiele betreffend elementare Funktionen, etwa area-Funktionen oder $\exp(x)$; wir leiten diese hier nicht explizit ab, sondern wenden uns einer Klasse von höheren transzendenten Funktionen zu:

3. Elliptische Funktionen und Elliptische Integrale

Die Methode (15) zur Gewinnung asymptotischer Entwicklungen ist besonders effizient, wenn die Funktion f^{-1} ein *algebraisches Additionstheorem* besitzt.

Mit Funktionen, die diese Eigenschaft haben, hat sich ausführlich K. Weierstraß beschäftigt [16]. Es gilt der

Satz 3.1 (K. Weierstraß). *Es sei $\varphi(z)$ eine eindeutige analytische Funktion, die ein algebraisches Additionstheorem besitzt. Dann ist $\varphi(z)$*

1. *eine rationale Funktion von z oder*
2. *eine rationale Funktion eines Arguments der Form* $\exp((2\pi i/\omega) \cdot z)$ *($\rightarrow \varphi$ ist einfach periodisch) oder*
3. *eine elliptische Funktion ($\rightarrow \varphi$ ist doppelt-periodisch).*

Auch die Umkehrung hiervon ist richtig: Eine Funktion, die zu einer dieser drei Klassen gehört, besitzt ein algebraisches Additionstheorem.

1 und 2 können als Spezialfall von 3 aufgefaßt werden; diesem dritten Fall wenden wir uns nun zu.

3.1. *Eigenschaften elliptischer Funktionen und Integrale*

Zunächst geben wir einen kurzen Überblick über die wichtigsten Eigenschaften dieser Funktionen, der zwar etwas ausführlicher ist, als es für die anschließende Anwendung von Satz 2.2 nötig wäre, jedoch natürlich keinen tiefen Einblick in die Theorie der elliptischen Funktionen geben kann. Hierfür verweisen wir auf die entsprechende Literatur [1, 4, 6, 8, 11, 14, 16, 17], wo man auch die Beweise der nachfolgenden Aussagen findet.

DEFINITION 3.2. (a) Eine Funktion $\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ heißt *elliptisch*, wenn gilt:

1. φ ist meromorph und
2. es gibt zwei von Null verschiedene komplexe Zahlen ω_1, ω_2 mit $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$, so daß

$$\varphi(z+\omega_1) = \varphi(z),$$

$$\varphi(z+\omega_2) = \varphi(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Es sei z_0 eine beliebige, aber fest gewählte komplexe Zahl; die Menge

$$P_\varphi(z_0) := \{z \in \mathbb{C}; z = z_0 + \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2; 0 \leqslant \lambda_1, \lambda_2 < 1\}$$

heißt *Periodenparallelogramm* von φ (bzgl. z_0).

Die elementare Theorie (s. obige Literaturhinweise) besagt, daß eine elliptische Funktion ohne Pole eine Konstante ist (Liouville) und daß die Residuensumme einer elliptischen Funktion φ in jedem Periodenparallelogramm gleich Null ist. Daraus folgt, daß φ mindestens zwei Pole (mit Vielfachheit gezählt) in $P_\varphi(z_0)$ haben muß. Die beiden einfachsten Möglichkeiten, diese Forderung zu erfüllen, sind

1. φ hat genau einen Pol der Ordnung zwei in $P_\varphi(z_0)$ (Weierstraß),
2. φ hat genau zwei einfache Pole in $P_\varphi(z_0)$ (Jacobi).

Im folgenden werden wir uns mit *Jacobi's elliptischen Funktionen* beschäftigen, speziell mit dem *sinus amplitudinis*: Für reelle Zahlen α und k, $0 \leqslant k \leqslant 1$, bezeichnen wir mit x das Integral

$$x := \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2\theta}}; \tag{21}$$

man nennt die Funktion $\alpha(x, k)$, die man durch Umkehrung des Integrals (21) erhält, *Amplitude* von x ($am(x, k)$), und definiert den *sinus amplitudinis* durch

$$\operatorname{sn}(x, k) := \sin(\alpha) := \sin am(x, k).$$

Es gilt $\operatorname{sn}(x, 0) = \sin(x)$ und $\operatorname{sn}(x, 1) = \tanh(x)$; der sinus amplitudinis ist somit eine natürliche Verallgemeinerung der trigonometrischen Funktionen, die in Kapitel 2 behandelt wurden.

Unsere Definition von $\operatorname{sn}(x, k)$ gilt zunächst nur für $x \in \mathbb{R}$, denn mit diesem Fall werden wir uns ausschließlich befassen. Die Funktion kann jedoch auf die ganze komplexe Ebene fortgesetzt werden (s. [11, S. 17]).

Diese (fortgesetzte) Funktion $\operatorname{sn}(z, k)$ ist eine elliptische Funktion; sie hat die primitiven Perioden $\omega_1 = 4 \cdot K(k)$ und $\omega_2 = 2i \cdot K(k')$ und einfache Pole genau in den Punkten

$$z_{n,m} := 2n \cdot K(k) + (2m+1) \cdot i \cdot K(k'), \qquad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Dabei ist $k' := \sqrt{1-k^2}$ und $K(k)$ das *vollständige elliptische Integral erster Art*, definiert durch

$$K(k) := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}; \tag{22}$$

$\operatorname{sn}(z, k)$ hat also in jedem Periodenparallelogram genau zwei einfache Pole.

Als elliptische Funkton besitzt der sinus amplitudinis nach Satz 3.1 ein algebraisches Additionstheorem (s. z.B. [1, Zf.16.17] oder [11, S.22]), aus dem man die folgende "Halbwinkel–Formel" ableitet:

$$\operatorname{sn}^2\left(\frac{x}{2}, k\right) = \frac{1-\sqrt{1-\operatorname{sn}^2(x,k)}}{1+\sqrt{1-k^2\operatorname{sn}^2(x,k)}}. \tag{23}$$

3.2. *Berechnung elliptischer Integrale erster Art*

Aufgrund von (23) können wir nun Satz 2.2 sinnvoll auf $\operatorname{sn}(x, k)$ anwenden und somit eine as. Entwicklung für die Umkehrfunktion von $\operatorname{sn}(x, k)$ konstruieren (bei Anwendung des Satzes ist $\operatorname{sn}(x, k) = f^{-1}(x)$).

Diese Umkehrfunktion ist ihrerseits von größtem Interesse, es handelt sich um das *elliptische Integral erster Art*, definiert durch

$$F(x, k) := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{24}$$

(vgl. (22)). $F(x, k)$ hat eine Reihenentwicklung der Form

$$F(x, k) = x + \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu(k) \cdot x^{2\nu+1}.$$

Nach Satz 2.2 und Bemerkung 2.3 haben wir somit *das folgende Ergebnis*: Die Funktionen $\sigma_n = \sigma_n(x, k)$, definiert durch

$$\sigma_n := n \cdot \operatorname{sn}\left(\frac{F(x,k)}{n}, k\right), \qquad n = 1(1)\infty \tag{25}$$

besitzen eine as. Entwicklung nach dem logarithmischen System $L(2, 4, ...)$, d.h.

$$\sigma_n = \sigma_n(x, k) = F(x, k) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu(x, k)}{n^{2\nu}}.$$

Mit Formel (23) ergibt dies den

SATZ 3.3. *Für* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *und* $0 \leqslant k \leqslant 1$ *sei*

$$\begin{aligned} y_0 &:= x \\ y_i &:= 2^i \cdot \sqrt{\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{y_{i-1}}{2^{i-1}}\right)^2}\right) \Big/ \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{k y_{i-1}}{2^{i-1}}\right)^2}\right)}, \qquad i = 1(1)\infty. \end{aligned} \tag{26}$$

Dann ist

$$y_i = y_i(x, k) = \sigma_{2^i}(x, k)$$

mit $\sigma_n(x, k)$ *aus* (25); *dies bedeutet, daß* y_i *eine as. Entwicklung nach dem geometrischen System* $G(4^{-1}, 4^{-2}, ...)$ *besitzt, also*

$$y_i(x, k) = F(x, k) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu(x, k)}{4^{i\nu}}. \tag{27}$$

Bemerkung 3.4. Für $k = 0$ lautet (26)

$$y_i = \frac{2^i}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{y_{i-1}}{2^{i-1}}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot y_{i-1}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{y_{i-1}}{2^{i-1}}\right)^2}}},$$

d.h. $\lim_{i \to \infty} y_i(x, 0) = \arcsin(x)$ (vgl. (12)); dies ist ein neuer Beweis dafür, daß $\operatorname{sn}(x, 0) = \sin(x)$.

Eine elementare Umformung zeigt, daß

$$\sigma_n^2(x, k) = F^2(x, k) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_\nu(x, k)}{n^{2\nu}}.$$

Aus Stabilitäts- und Schnelligkeitsgründen sollte man daher die Iteration

$$\begin{aligned} \tilde{y}_0 &:= x^2 \\ \tilde{y}_i &:= \frac{4\tilde{y}_{i-1}}{\left(1 + \sqrt{1 - \frac{\tilde{y}_{i-1}}{4^{i-1}}}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{1 - k^2 \cdot \frac{\tilde{y}_{i-1}}{4^{i-1}}}\right)} \end{aligned} \tag{28}$$

benutzen, die ebenfalls eine as. Entwicklung nach dem System $L(2, 4, ...)$ besitzt (mit Grenzwert $F^2(x, k)$), jedoch in jedem Schritt eine Quadratwurzel-Auswertung einspart.

In der Praxis wendet man die Elimination (7) auf die $\tilde{y}_i$ an und zieht am Ende der Prozedur die Wurzel aus $\tilde{y}_0^{(k_{\max})}$.

Wieder ein kleines *numerisches Beispiel*: Approximation von $F(0.5, 0.2)$ durch (28) und (7). Die Ergebnisse zeigt Tabelle III in Form von Schema (8); wir sehen die berechneten Werte $\tilde{y}_i^{(k)}$ für $k=0(1)5$ und $i=0(1)5-k$. $\tilde{y}_0^{(5)}$ stimmt mit $F^2(0.5, 0.2)$ auf 17 Dezimalstellen überein! Der resultierende Wert für $F(0.5, 0.2)$ ist $\sqrt{\tilde{y}_0^{(5)}}=0.52450880529443994$ (auf 17 Dezimalstellen genau).

3.3. *Numerischer Vergleich mit der AGM-Methode*

Die wohl älteste und zugleich bekannteste Methode zur numerischen Berechnung (vollständiger) elliptischer Integrale ist die von C. F. Gauß entwickelte Methode des arithmetisch-geometrischen Mittels (AGM-Methode), die auf folgendem beruht (vgl. [1, 2, 3, 13]): Es seien zwei reelle Zahlen a, b mit $a \geqslant b > 0$ gegeben; die durch

$$\begin{aligned} a_0 &:= a, \qquad b_0 := b \\ a_{\nu+1} &:= \tfrac{1}{2}(a_\nu + b_\nu), \qquad \nu = 0(1)\infty, \\ b_{\nu+1} &:= \sqrt{a_\nu \cdot b_\nu}, \qquad \nu = 0(1)\infty, \end{aligned} \tag{29}$$

definierten Folgen $\{a_\nu\}$ und $\{b_\nu\}$ konvergieren monoton gegen einen gemeinsamen Grenzwert AGM(a, b). Diese Konvergenz ist quadratisch, d.h. es gibt eine Zahl $\gamma > 0$, so daß

$$(a_{\nu+1} - b_{\nu+1}) \leqslant \gamma (a_\nu - b_\nu)^2 \qquad \text{für alle } \nu.$$

Der Wert AGM(a, b) kann ausgedrückt werden durch das vollständige elliptische Integral erster Art

$$I(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos(\theta) + b^2 \sin(\theta)}}, \tag{30}$$

das durch die Substitution $t := \sin(\theta)$ auf die in (22) bzw. (24) definierte Form

$$I(a, b) = \frac{1}{a} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\cdot(1-(1-b^2/a^2)\cdot t^2)}} \tag{31}$$

gebracht werden kann. Es gilt

$$\mathrm{AGM}(a, b) = \frac{\pi}{2 \cdot I(a, b)}. \tag{32}$$

TABELLE III

i \ k	0	1	2	3	4	5
0	0.25000000000000000					
		0.27482991447770532				
1	0.26862243585827899		0.27510887759559904			
		0.27509144240073068		0.27510948648328087		
2	0.27347419076511776		0.275109476969419084		0.27510948683135072	
		0.27510834980886833		0.27510948682999108		0.27510948683140070
3	0.27469981004793069		0.27510948667591951		0.27510948683140065	
		0.27510941562172881		0.27510948683139514		
4	0.27500701422827928		0.27510948682896584			
		0.27510948237851352				
5	0.27508386534095496					

Dies fassen wir zu einem Algorithmus zur Berechnung des vollständigen elliptischen Integrals erster Art $K(k) = F(1, k)$ nach der AGM-Methode zusammen:

$$\begin{aligned}
&1.\quad \text{setze } a_0 := 1, \qquad b_0 := \sqrt{1-k^2}\\
&2.\quad \nu := \nu + 1\\
&\qquad a_\nu := \tfrac{1}{2}(a_{\nu-1} + b_{\nu-1})\\
&\qquad b_\nu := \sqrt{a_{\nu-1} \cdot b_{\nu-1}}\\
&\qquad \text{Genauigkeit erreicht?} \begin{cases} \text{nein} \to 2,\\ \text{ja} \to 3.\end{cases}\\
&3.\quad F(1, k) := \pi/(2 \cdot a_\nu).
\end{aligned} \tag{33}$$

Die Iterationsvorschrift des Verfahrens (33) ist sehr einfach; wegen der quadratischen Konvergenz ist es daher allen anderen Verfahren zur Berechnung vollständiger elliptischer Integrale bzgl. des Verhältnisses Genauigkeit/Schnelligkeit überlegen.

Anders ist das bei der Berechnung des Integrals $F(x, k)$ für $0 \leqslant x < 1$. Die Iteration (33) muß hier folgendermaßen modifiziert werden (s. auch [1, Zf. 17.6]:

$$\begin{aligned}
&1.\quad \text{setze } a_0 := 1, \qquad b_0 := \sqrt{1-k^2}\\
&\qquad \varphi_0 := \arcsin(x)\\
&2.\quad \nu := \nu + 1\\
&\qquad a_\nu := \tfrac{1}{2}(a_{\nu-1} + b_{\nu-1})\\
&\qquad b_\nu := \sqrt{a_{\nu-1} \cdot b_{\nu-1}}\\
&\qquad \varphi_\nu \text{ ist implizit definiert durch}\\
&\qquad \tan(\varphi_\nu - \varphi_{\nu-1}) = \frac{b_{\nu-1}}{a_{\nu-1}} \cdot \tan(\varphi_{\nu-1});\\
&\qquad \text{dabei ist } \varphi_\nu \text{ so zu wählen, daß } \varphi_\nu - \varphi_{\nu-1} \geqslant 0.\\
&\qquad \text{Genauigkeit erreicht?} \begin{cases} \text{nein} \to 2,\\ \text{ja} \to 3.\end{cases}\\
&3.\quad F(x, k) := \varphi_\nu/(2^\nu \cdot a_\nu).
\end{aligned} \tag{34}$$

Dieser Algorithmus ist wegen der Tangens—bzw. Arcustangens-Operationen relativ aufwendig. Für Genauigkeiten, wie sie etwa für (Micro-) Computer-Approximationen benötigt werden, ist (34) daher *langsamer* als unser Verfahren ((28) und (7)).

Tabelle IV zeigt die durchschnittliche CPU-Zeit (in ms), die die beiden Verfahren benötigten, um $F(x, k)$ mit der in Spalte 1 angegebenen

TABELLE IV

Zu erreichende Genauigkeit	Zeit in ms	
	AGM-Verfahren (34)	Eliminations-Verfahren (28) & (7)
10^{-2}	1.62	0.71
10^{-4}	1.98	1.02
10^{-6}	2.30	1.46
10^{-8}	2.61	1.70
10^{-10}	2.84	1.96
10^{-12}	3.02	2.38
10^{-14}	3.23	2.66
10^{-16}	3.39	2.98
10^{-18}	3.47	3.10
10^{-20}	3.62	3.46
10^{-22}	3.75	3.75
10^{-24}	3.81	3.92
10^{-26}	4.02	4.28

Genauigkeit zu berechnen (auf der Siemens-Anlage der Universität Mannheim).

An der Tabelle erkennt man, daß unser Eliminationsverfahren bis zu einer Genauigkeit von 10^{-20} dem AGM-Verfahren zeitlich überlegen ist.

Da auch andere Methoden, z.B. Potenzreihen-Auswertung, nicht sehr effizient sind, kann das Eliminationsverfahren also durchaus als geeignet zur praktischen Berechnung elliptischer Integrale bezeichnet werden.

3.4. *Berechnung von* $\mathrm{sn}(x, k)$

Wie wir oben sahen, kann das elliptische Integral erster Art $F(x, k)$ mit unserer Methode berechnet werden.

$F(x, k)$ hat die Ableitung

$$\frac{d}{dx} F(x, k) = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}^{\,-1},$$

die durch elementare Operationen berechnet werden kann. Daher ist es möglich, das *Newton-Verfahren zur Berechnung der Umkehrfunktion* zur Approximation von $\mathrm{sn}(x, k)$ anzuwenden. Die Newton-Iteration lautet in diesem Fall

$$\begin{aligned} f_0 &:= x \\ f_{\nu+1} &:= f_\nu - \sqrt{(1-f_\nu^2)(1-k^2 f_\nu^2)} \cdot (F(f_\nu, k) - x) \qquad \nu = 0(1)\infty. \end{aligned} \tag{35}$$

Für $x \in [0, 1]$ konvergiert die Folge $\{f_\nu\}$ gegen $\mathrm{sn}(x, k)$. Mit Hilfe der Formel

$$\mathrm{sn}(2x, k) = \frac{2\,\mathrm{sn}(x, k) \cdot \sqrt{(1 - \mathrm{sn}^2(x, k)) \cdot (1 - k^2\,\mathrm{sn}^2(x, k))}}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^4(x, k)} \tag{36}$$

können wir, zumindest theoretisch, $\mathrm{sn}(x, k)$ für beliebig großes x approximieren.

Der ganze Prozeß mag bei dieser Schilderung etwas aufwendig wirken, wie wir im nächsten Beispiel jedoch sehen werden, ist er das, vom zeitlichen Aspekt her, keineswegs.

NUMERISCHES BEISPIEL. Abbildung 1 zeigt das Bild von $\mathrm{sn}(x, k)$ im Bereich

$$B := \{(x, k) \in \mathbb{R}^2; 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant k \leqslant 1\}.$$

Für die Zeichnung wurde mit der oben beschriebenen Methode der Wert von $\mathrm{sn}(x, k)$ in den 231 diskreten Punkten (x_ν, k_μ) mit

$$x_\nu := \nu \cdot \frac{\pi}{20}, \qquad \nu = 0(1)20, \qquad k_\mu := \frac{\mu}{10}, \qquad \mu = 0(1)10$$

auf 9 Dezimalstellen genau berechnet; für die Berechnung von $F(f, k)$ wurde dabei die Iteration (28) und die Elimination (7) mit $k_{\max} = 5$ benutzt. Die gesamte Rechenzeit betrug *nur* 0.78 *CPU-Sekunden* (auf der Siemens-Anlage der Universität Mannheim), das sind im Durchschnitt weniger als 0.0035 CPU-Sekunden für eine Auswertung von $\mathrm{sn}(x, k)$!

3.5. *Beliebige elliptische Funktionen*

Zu Beginn dieses Kapitels waren wir bei der Suche nach Funktionen mit einem algebraischen Additionstheorem auf die elliptischen Funktionen

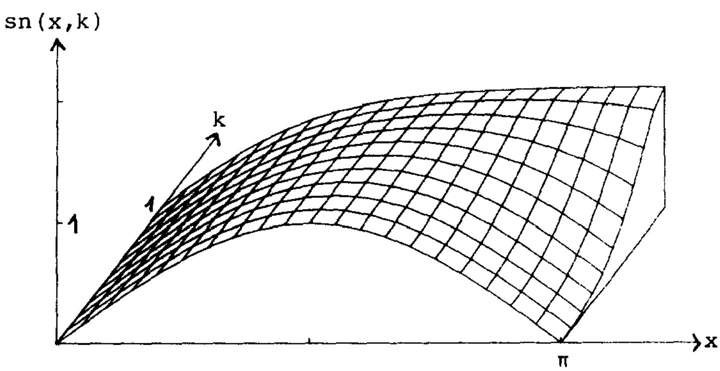

ABBILDUNG 1

gestoßen. Die weiteren Untersuchungen bezogen sich auf eine spezielle Funktion dieser Art, nämlich $sn(x, k)$.

Dies ist natürlich zunächst eine gewisse Einschränkung, aber das folgende Lemma wird zeigen, daß unsere Ergebnisse auf beliebige elliptische Funktionen übertragbar sind.

LEMMA 3.5. *Jede elliptische Funktion φ mit primitiven Perioden ω_1 und ω_2 kann als rationale Funktion von* $\operatorname{sn}(z, k)$ *und* $\frac{d}{dz}\operatorname{sn}(z, k)$ *dargestellt werden.*

Beweis. Ein bekannter Satz von K. Weierstraß (z.B. [6, S. 172]) besagt, daß φ darstellbar ist in der Form

$$\varphi(z) = R_1(\wp(z)) + \wp'(z) \cdot R_2(\wp(z)); \tag{37}$$

dabei sind R_1 und R_2 rationale Funktionen und $\wp(z)$ ist die *Weierstraß'sche* $\wp$-*Funktion*.

Man definiere die Zahlen e_ν, $\nu = 1, 2, 3$ wie folgt:

$$e_1 := \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \qquad e_2 := \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right), \qquad e_3 := \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right).$$

Dann ist

$$\wp(z) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(u, k)}$$

mit

$$u := z \cdot \sqrt{e_1 - e_3}$$

und

$$k := \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}}.$$

Zusammen mit (37) beweist dies die Aussage. ∎

LITERATUR

1 M. ABRAMOWITZ AND I. STEGUN, "Handbook of Mathematical Functions," Dover, New York, 1965.

2. J. M. BORWEIN AND P. B. BORWEIN, The arithmetic-geometric mean and fast computation of elementary functions, *SIAM Rev.* **26** (1984), 351–366.

3. R. P. Brent, Fast multiple-precision evaluation of elementary functions, *Assoc. Comput. Mach.* **23** (1976), 242–251.
4. A. Cayley, "An Elementary Treatise on Elliptic Functions," Dover, New York, 1961.
5. A. Hurwitz, Über die Einführung der elementaren transzendenten Funktionen in der algebraischen Analysis, *Math. Ann.* **70** (1911), 33–47.
6. A. Hurwitz und R. Courant, "Funktionentheorie," 4. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, 1964.
7. D. C. Joyce, Survey of extrapolation processes in numerical analysis, *SIAM Rev.* **13** (1971), 435–488.
8. W. Magnus, F. Oberhettinger, and R. P. Soni, "Formulas and Theorems for Special Functions of Mathematical Physics," Springer-Verlag, Berlin, 1966.
9. G. Meinardus, On the asymptotic behavior of iteration sequences, *in* "Proceedings, Fifth South African Symposium on Numerical Analysis, Durban, 1979."
10. G. Meinardus und G. Merz, "Praktische Mathematik II," Bibliograph. Inst., Mannheim, 1982.
11. F. Reutter, D. Haupt, und G. Jordan, "Elliptische Funktionen einer komplexen Veränderlichen; Nomogramme und Formeln," Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1971.
12. H. Rutishauser, Ausdehnung des Rombergschen Prinzips, *Numer. Math.* **5** (1963), 48–54.
13. E. Salamin, Computation of π using arithmetic–geometric mean, *Math. Comp.* **30** (1976), 565–570.
14. G. Sansone and J. Geretsen, "Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable," Noordhoff, Groningen, 1960.
15. E. Stiefel, Altes und Neues über numerische Quadratur, *Z. Angew. Math. Mech.* **41** (1961), 408–413.
16. K. Weierstrass, "Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Funktionen," Physica-Verlag, Würzberg, 1962 (Nachdruck der 2. Aufl. 1893).
17. E. T. Whittaker and G. N. Watson, "A Course of Modern Analysis," 4th ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952.